

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
08.02.2026
CLASA a VII- a

- **Minden feladat kötelező. Hivatalból 10 pont jár.**
- **A versenylapra a teljes megoldást írtátok le.**
- **A munkaidő három óra.**

I Tétel (20 pont)

Az ABC háromszögben $AB < AC$, a BD félegyenes az ABC szög szögfelezője, $D \in AC$ és AM oldalfelező egyenes ($M \in BC$). Az M ponton át meghúzzuk az AB oldallal párhuzamos MN egyenest ($N \in AC$), amely a BD -t a P pontban metszi. Az N ponton át meghúzzuk az AM -mel párhuzamos NQ egyenest ($Q \in BC$). Igazoljuk, hogy $MP = 2QC$.

II Tétel (20 pont)

Határozzátok meg $a \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\sqrt{\frac{2025a-2026}{2023a-2024}} \in \mathbb{N}$.

III Tétel (25 pont)

Adott az A halmaz: $A = \left\{ \frac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{\sqrt{1 \cdot 5}}, \frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{\sqrt{5 \cdot 9}}, \frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{\sqrt{9 \cdot 13}}, \dots, \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2021}}{\sqrt{2021 \cdot 2025}} \right\}$

- a) Számítsátok ki az A halmaz elemeinek összegét.
- b) Igazoljátok, hogy A bármely nem üres részhalmaza elemeinek összege, nem természetes szám.

IV Tétel (25 pont)

Adott az $ABCD$ négyzet. Jelöljük M -mel a B pontnak a C pont szerinti szimmetrikusát. A $[CA$ félegyenesen vegyük fel az N pontot úgy, hogy $A \in (CN)$ és $\sphericalangle NMB = 30^\circ$. Az MN egyenes az AD -t a P pontban és a BD -t a Q pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $BP = BQ$.